

Reciprocity in electromagnetic systems

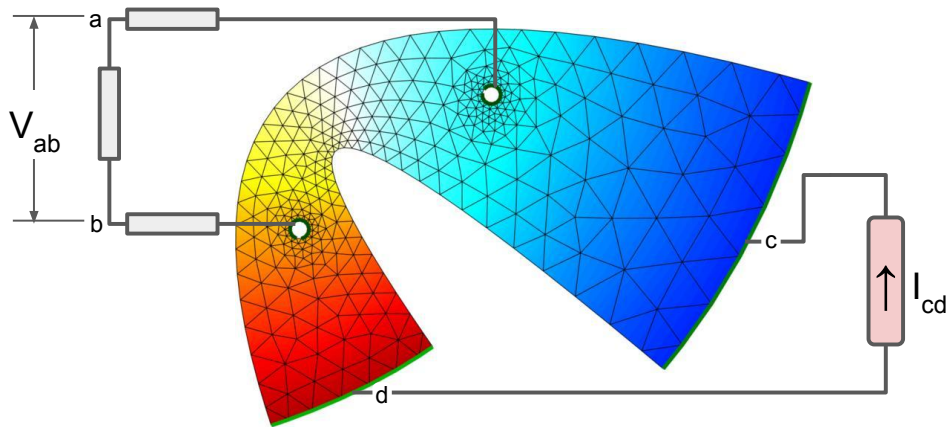
EIT2023 – 23rd International Conference on Biomedical Applications of Electrical Impedance
Tomography
Aachen, Germany, 12th – 14th June 2023

Andy Adler¹ and William R.B. Lionheart²

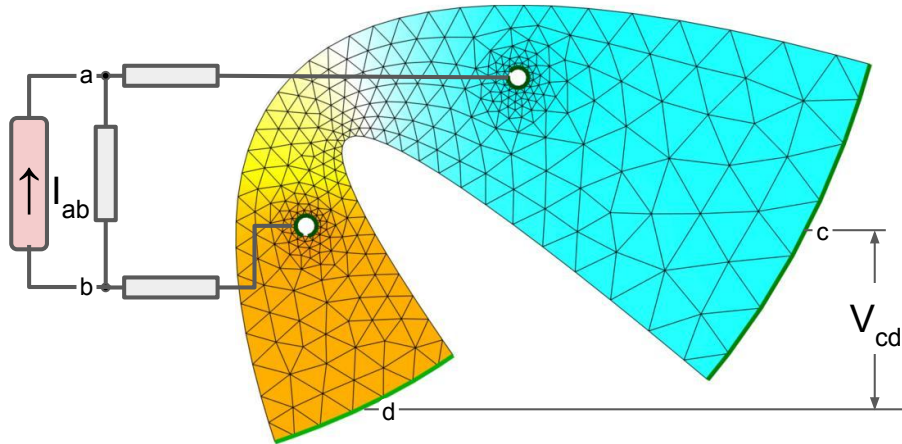
¹Systems and Computer Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada

²School of Mathematics, University of Manchester, UK

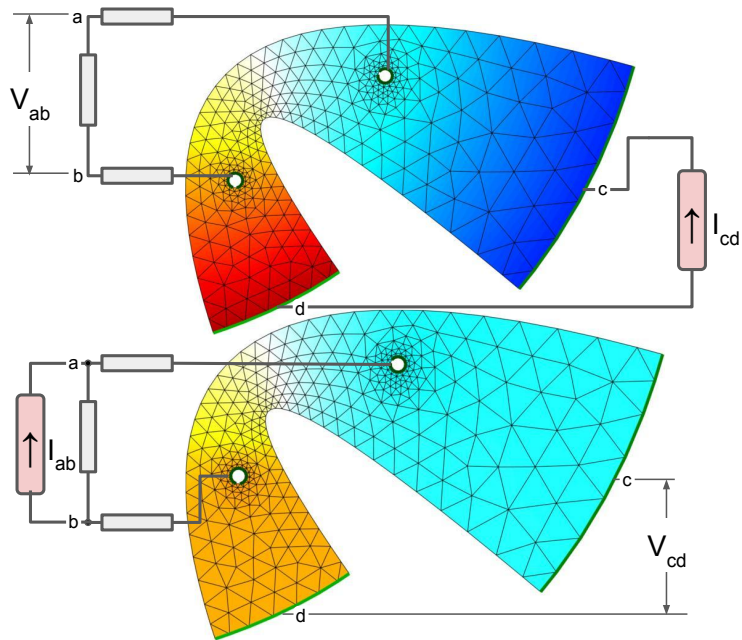
Reciprocity



Reciprocity

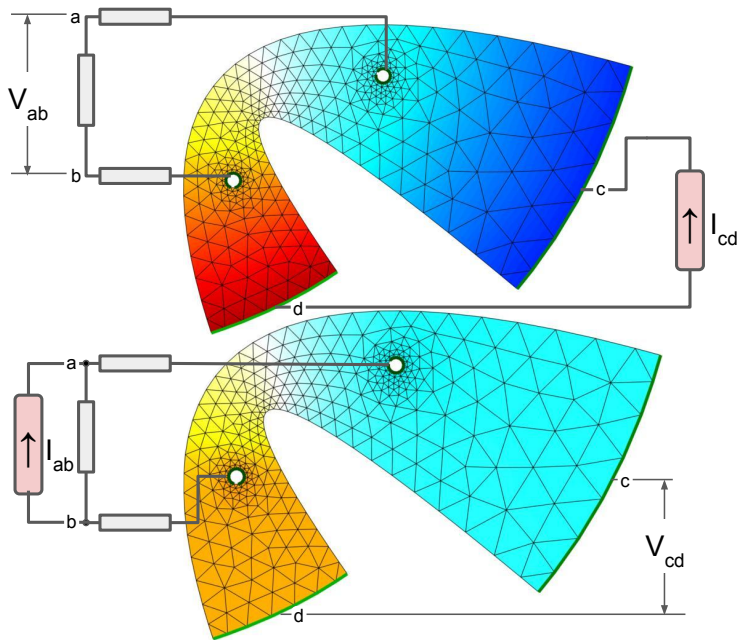


Reciprocity



Reciprocity

if $I_{ab} = I_{cd}$,
then $V_{ab} = C_{cd}$



Reciprocity

Given angular frequency ω :

- electric field (\vec{E})
- current density (\vec{J})
- complex conductivity $\sigma^* = \sigma + i\omega\epsilon$.

$$\vec{J} = \left[\sigma^* - (i\omega\mu)^{-1}(\nabla \times \nabla \times) \right] \vec{E}$$

- a current density \vec{J}_1 which produces electric and magnetic fields \vec{E}_1 and \vec{H}_1
- another current \vec{J}_2 and fields \vec{E}_2, \vec{H}_2 .
- an isolated system (no energy from the outside),

reciprocity gives:

$$\int \vec{J}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = \int \vec{J}_2 \cdot \vec{E}_1 dV$$

Reciprocity is valid for linear, passive electromagnetic media

Reciprocity

The Lorentz reciprocity

$$\int \vec{J}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = \int \vec{J}_2 \cdot \vec{E}_1 dV$$

published in 1895 following analogous results on sound and light ¹

Within the EIT community, it has been common to cite Geselowitz [1] who rediscovered the analogous theorem in electrostatics (Green's reciprocity).

The Lorentz reciprocity is more general and applies to all linear electromagnetic networks. It is not valid for non-linear elements (e.g. diodes).

¹RJ Potton, "Reciprocity in optics" Prog Physics 67:717–754, 2004.

DAVID B. GESELOWITZ, SENIOR MEMBER, IEEE

Abstract—The change in mutual impedance ΔZ resulting from a change Δg in the conductivity of a particular region of a volume conductor is shown to be given by $\Delta Z = -\Delta g / I_i^2 \int L_i \, dv$. L_i and L_j are the lead fields associated with the two ports used to measure ΔZ . The integration is over the region where the conductivity has changed. The superscript i indicates that the lead field is to be evaluated following the change in conductivity. An example involving a spherical conductor is provided.

INTRODUCTION

INFORMATION about the internal conductivity of an insulated volume conductor can be gained from impedance measurements at its surface. Fig. 1(a) shows an arrangement commonly used. A (sinusoidal) current I is injected at the terminal pair A, B . The voltage at C, D is then measured and the ratio of voltage to current gives a mutual impedance Z [1]. Fig. 1(b) shows a generalization of this scheme in which a number of sites are used on the surface of the conductor.

If the conductivity of a particular internal region is changing with time, then Z will also vary with time. Therefore, information may be gained concerning the changing internal conductivity as in the technique of impedance plethysmography. By appropriately selecting the location of surface electrode sites and resistor values it should be possible to develop an arrangement for which the mutual impedance is selective for and sensitive to a particular region. O. H. Schmitt [6] has suggested that the concept of lead transfer impedance used in electrocardiography should be applicable here, and that the mutual impedance should be proportional to the dot product of the transfer impedances associated, respectively, with the current terminals and voltage terminals. This paper will present a formal development of this idea.

Manuscript received June 4, 1970. This work was supported by Grant HE-08808 from the National Institutes of Health of the U. S. Public Health Service.

The author is with the Department of Biomedical Engineering, Moore School of Electrical Engineering, Philadelphia, Pa., and the Department of Medicine, School of Medicine, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pa. 19104.

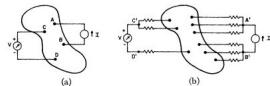


Fig. 1. Measurement of mutual impedance. Volume conductor is treated as a two-port system. (a) A simple four-electrode arrangement is used. (b) Resistor weighting networks are used both at the current and the voltage electrodes.

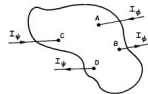


Fig. 2. Diagram showing terminology used. Current I_a at port A, B gives rise to voltage ϕ_{CD} . Current I_b at port C, D gives rise to voltage ψ_{AB} .

THEORY

For simplicity the scheme of Fig. 1(a) will be considered. Generalization to the scheme of Fig. 1(b) is straightforward. In Fig. 2 the volume conductor is linear and is surrounded by an insulator, air. A current I_a impressed at A, B gives rise to a voltage ϕ_{CD} at terminals C, D . Conversely, a current I_b impressed at C, D results in a voltage ψ_{AB} . By definition, the mutual impedance Z is

$$Z = \frac{\phi_{CD}}{I_a} = \frac{\psi_{AB}}{I_b} \quad (1)$$

The second equality is a consequence of the reciprocity theorem, as will be shown in the following.

is. Het gaat vooraf aan de contractie en volgt steeds in onmeetbaar korten tijd op de inwerking van den electrischen prikkel, terwijl het contractieproces steeds een merkbaar stadium van latente werking heeft, dat buitendien met afnemende sterkte van den prikkel zeer belangrijk grooter wordt.

Door de Heeren PLACE en VAN DER WAALS worden over enkele punten nadere inlichtingen gevraagd, en door den Spreker gegeven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ bespreekt: „*het theorema van POYNTING over de energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht*”.

In 1883 heeft POYNTING ¹⁾ eene tegenwoordig algemeen bekende beschouwing ontwikkeld, volgens welke overal in het electromagnetisch veld een energiestroom bestaat, die in richting en grootte (per vlakke-eenheid en tijds-eenheid) bepaald wordt door het vector-product van de electrische en de magnetische kracht, gedeeld door 4π . Eene meer algemeene stelling, waarin die van POYNTING als een bijzonder geval begrepen is, heb ik bij VOLTERRA ²⁾ gevonden. Het is deze algemeene stelling, die ik als uitgangspunt voor eenige beschouwingen wensch te kiezen.

§ 1. Schrijft men de grondvergelijkingen der theorie van MAXWELL in den eenvoudigen vorm die daaraan door HEAVISIDE en HERTZ word gegeven, dan bevatten zij de volgende vectoren: de *electrische stroom* \mathfrak{E} , de *electrische kracht* \mathfrak{E} , de *magnetische kracht* \mathfrak{H} en de *magnetische inductie* \mathfrak{B} ; bovendien, wanneer men met dielectrica te doen heeft, de *dielectrische polarisatie* \mathfrak{D} .

Het verband tusschen \mathfrak{H} en \mathfrak{B} en dat tusschen \mathfrak{E} en \mathfrak{D} , of — in dielectrica — tusschen \mathfrak{E} en \mathfrak{D} , is van den aard der stofafhankelijk. De overige vergelijkingen daarentegen, zoowel die, welke in het binnenste van een zelfde lichaam, als die, welke aan de grens van twee media gelden, zijn onder alle omstandigheden dezelfde.

Ten einde niet alleen het verloop van reeds opgewekte electriciteitsbewegingen, maar ook het ontstaan daarvan in de vergelijkingen uit te drukken, kan men aannemen dat hier of daar uitwendige

¹⁾ POYNTING, Phil. Trans. London, Vol. 175, p. 345.

²⁾ VOLTERRA, Acta Mathematica, Deel 16, p. 189.

$\frac{1}{4\pi} e^{-i\alpha t}$ onder begrijpen, hetzelfde wat van φ , ψ , χ werd opgemerkt.

Het zal nu voldoende zijn, op een der termen, die men aldus verkrijgt, b.v. op

$$\xi \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

de aandacht te vestigen. Uit het in de vorige § gezegde kan men afleiden dat dit de symbolische uitdrukking van den stroom is, die in Q in de richting h ontstaat door een koppel van lichtbronnen in P . En wel moeten de twee lichtbronnen die het koppel samenstellen in de richting der z -as op een oneindig kleinen afstand δ van elkander liggen, terwijl elke lichtbron de richting der y -as heeft en de eene door $\left[\frac{\xi}{\delta} e^{i\alpha t}\right]$, de andere door $\left[-\frac{\xi}{\delta} e^{i\alpha t}\right]$ wordt voorgesteld.

De slotsom van deze redeneering is dat men over het oppervlak σ eene zoodanige laag van enkelvoudige lichtbronnen en bovendien eene zoodanige laag van koppels van lichtbronnen kan verdeelen, dat deze voor \mathfrak{E}_1 in Q dezelfde symbolische waarde geven, als de uitwendige lichtbronnen. Dan zal echter ook dezelfde overeenstemming bestaan wat de werkelijke waarden van \mathfrak{E}_2 betreft.

Wat de bedoelde op σ aan te brengen lichtbronnen zelve aangaat, deze zijn geheel bekend, daar wij van elke lichtbron de richting kunnen aangeven en de integraal $\int E dr$ gelijk moet zijn aan het reële deel der complexe uitdrukking die, tusschen vierkante haken geschreven, geschild heeft om de lichtbron voor te stellen. Daar de aldus bepaalde lichtbronnen dezelfde worden, hoe men het punt Q en de richting h ook kiese, blijkt het dat de toestand in elk punt binnen het oppervlak σ kan worden beschouwd als voortgebracht door eene bepaalde verdeling van trillingsmiddelpunten over dit oppervlak.

Eene dergelijke stelling werd voor het geval van een enkel doorschijnend isotroop medium reeds vroeger door KIRCHHOFF bewezen ¹⁾.

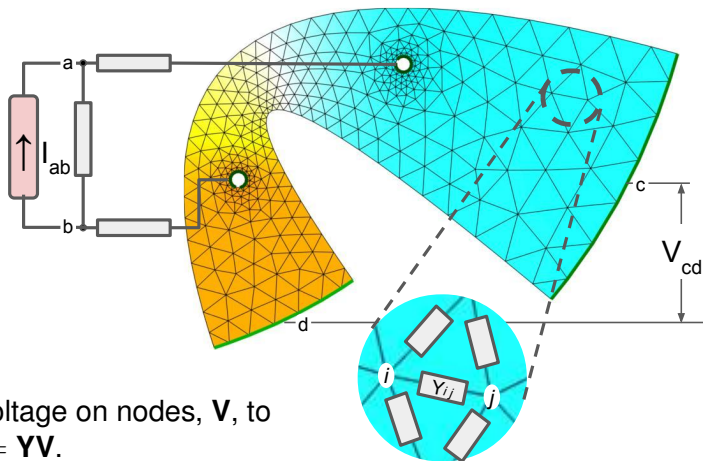
Hierop volgt eene korte discussie over sommige punten der voordracht tusschen den Spreker en de Heeren KORTEWEG en VAN DER WAALS.

¹⁾ KIRCHHOFF, Wied. Ann. Bd. 18, p. 663.

³⁾ HA Lorentz, "Het theorema van Poynting over de energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht" Proc Koninklijke Akademie van Wetenschappen 4:176–187, 1895.

Reciprocity in Electrical Networks

Linear, passive electrical networks are reciprocal



- admittance matrix \mathbf{Y} \rightarrow voltage on nodes, \mathbf{V} , to current into each node, $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$.
- Setting ground \rightarrow reduced matrices $\tilde{\mathbf{I}}$, $\tilde{\mathbf{V}}$, and $\tilde{\mathbf{Y}}$
- impedance matrix $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Y}}^{-1}$, such that $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{I}}$.

Reciprocity in Electrical Networks

Any network voltage

$$v = \mathbf{t}^T \mathbf{Z} \mathbf{I}$$

where *test* vector \mathbf{t} represents the electrode gain.

For pair-drive EIT where current flows between nodes a and b ,

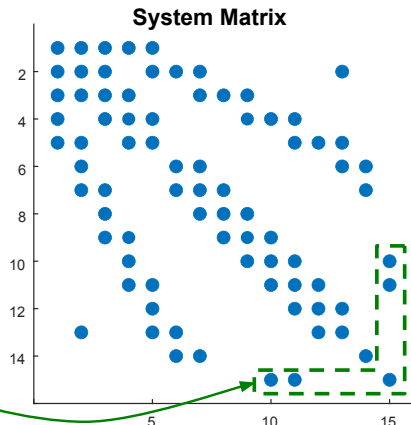
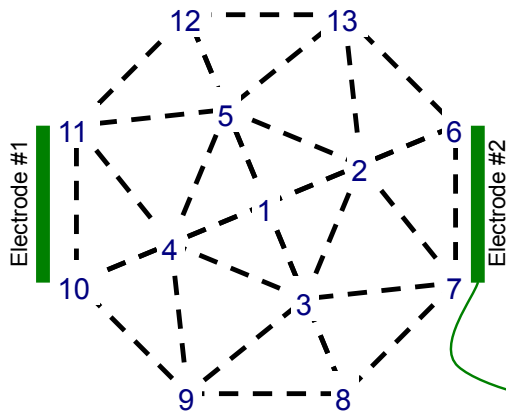
$$\mathbf{I}_a = -\mathbf{I}_b = I_{\text{applied}},$$

with other elements in \mathbf{I}_{ab} zero. Using a gain, G , between electrodes c and d , $\tilde{\mathbf{t}}_{cd} = 0$ except for $\tilde{\mathbf{t}}_c = -\tilde{\mathbf{t}}_d = G$,

Reciprocity follows from \mathbf{Y} being symmetric, and thus

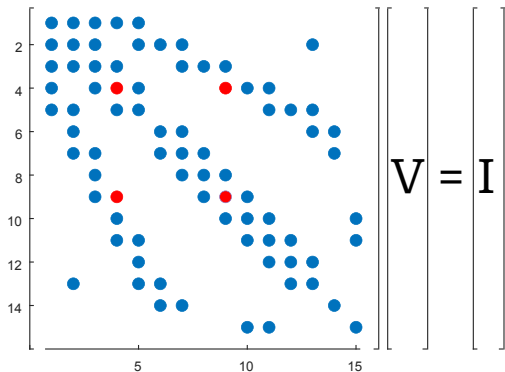
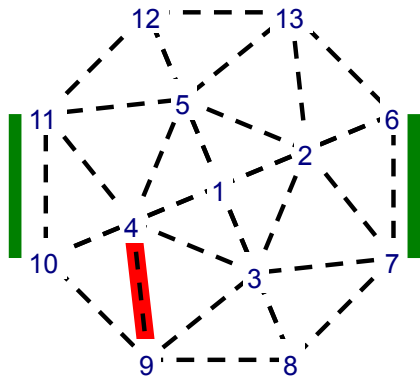
$$\mathbf{t}_{ab}^t \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{I}_{cd} = \mathbf{t}_{cd}^t \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{I}_{ab}.$$

Reciprocity in Electrical Networks



Left: FEM or resistor network, Right: System Matrix (\mathbf{Y})

Motivation for symmetrical \mathbf{Y}



We build up the space from empty. When adding admittance $Y_{4,9}$, then current $Y_{4,9}(V_4 - V_9)$ flows into N#4 and $Y_{4,9}(V_9 - V_4)$ flows into N#9.

\mathbf{Y} will increase by $Y_{4,9}$ at (4, 9) and (9, 4) and decrease by $Y_{4,9}$ at (4, 4) and (9, 9).

Reciprocity in electromagnetic systems

Abstract: We review reciprocity for electromagnetic (E&M) systems, including EIT. We note that

- reciprocity is valid for all linear E&M systems,
- it is closely related to reciprocity in circuit theory
- the correct reference for earliest work is Lorentz [2].

[1] DB Geselowitz, “An Application of Electrocardiographic Lead Theory to Impedance Plethysmography” IEEE T Biomed Eng, 18:38–41, 1971

[2] HA Lorentz, “Het theorema van Poynting over de energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht” Proc Koninklijke Akademie van Wetenschappen 4:176–187, 1895.

[3] RJ Potton, “Reciprocity in optics” Prog Physics 67:717–754, 2004.